

CORRECTION TD - M2

CHUTE SANS FROTTEMENT

Ex. n°1 • Parabole de sûreté

★★☆ 9379

1) On a :

$$\left[\delta \right] = \frac{(\text{L} \cdot \text{T}^{-1})^2}{\text{L} \cdot \text{T}^{-2}} = \text{L}$$

Il s'agit d'une longueur.

2) On applique le PFD dans le référentiel terrestre supposé galiléen, avec comme seule force le poids. On intègre deux fois pour avoir vitesse puis position.

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos(\theta) \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\theta) t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin(\theta) t \end{cases}$$

On exprime ensuite $z(x)$:

$$z(x) = -\frac{1 + \tan^2(\theta)}{2\delta} x^2 + \tan(\theta) x$$

3) On cherche z (la hauteur) avec la contrainte $\dot{z} = 0$ (hauteur maximale).

$$\dot{z} = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \Rightarrow z_{\max}(\theta) = \frac{\delta \sin^2(\theta)}{2}$$

Cette hauteur est maximale pour $\theta = \pi/2$, correspondant à une hauteur :

$$z_{\max}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\delta}{2}$$

4) On cherche x (la distance) avec la contrainte $z = 0$ (projectile au sol). D'après la question 1) :

$$z(x) = 0 = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\theta)} \right)^2 + \tan(\theta) x \Rightarrow x_{\max}(\theta) = 2\delta \cos(\theta) \sin(\theta)$$

On en déduit :

$$x_{\max}(\theta) = \delta \sin(2\theta)$$

Cette portée est maximale pour $\theta = \pi/4$, correspondant à une distance :

$$x_{\max}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \delta$$

5) Un point de coordonnées (X, Z) peut être atteint s'il existe un angle θ tel que :

$$Z = -\frac{1 + \tan^2(\theta)}{2\delta} X^2 + \tan(\theta) X$$

On pose : $u = \tan(\theta)$. On obtient une équation du deuxième ordre.

$$\frac{X^2}{2\delta} \cdot u^2 - X \cdot u + \left(Z + \frac{X^2}{2\delta} \right) = 0$$

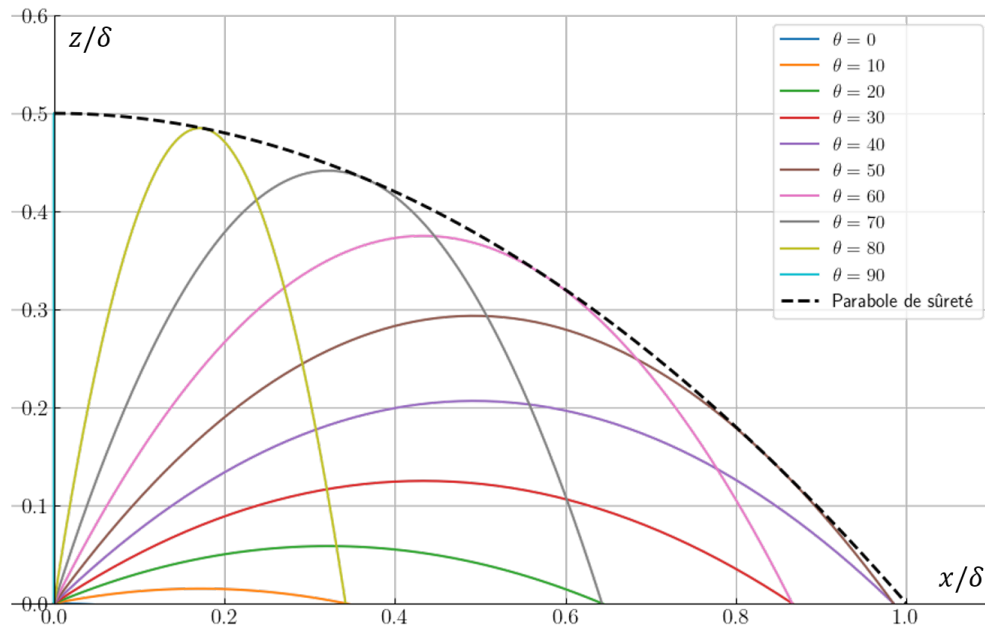
Cette équation admet des solutions si son discriminant est positif :

$$\Delta = X^2 - 4 \cdot \frac{X^2}{2\delta} \cdot \left(Z + \frac{X^2}{2\delta} \right) \geq 0 \Rightarrow Z \leq \frac{\delta}{2} - \frac{X^2}{2\delta}$$

Les points accessibles par un tir à la vitesse v_0 sont donc ceux situés **sous** la courbe

d'équation $Z = \frac{\delta}{2} - \frac{X^2}{2\delta}$. Il s'agit d'une **parabole**. On retrouve en particulier que

$Z = \frac{\delta}{2}$ lorsque $X = 0$ (cas où $\theta = \pi/2$) et que $X = \delta$ lorsque $Z = 0$ (cas où $\theta = \pi/4$). Tous les points de cette parabole sont atteints par une unique trajectoire. Tous les points sous la parabole sont atteints par deux trajectoires.



Ex. n°2 • Glissade sur un igloo

★★★ 2959

1) On applique le PFD sur l'esquimau dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\vec{N} &= N \vec{u}_r \\ \vec{P} &= mg(-\cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta) \\ \vec{a} &= -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} / \vec{u}_r \rightarrow -mR\dot{\theta}^2 = N - mg \cos(\theta) \\ / \vec{u}_\theta \rightarrow mR\ddot{\theta} = mg \sin(\theta) \end{cases}$$

La seconde équation est l'équation du mouvement. La première permet de trouver N , connaissant θ .

2) On multiplie la deuxième équation par $\dot{\theta}$ et on intègre par rapport au temps. On

obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^t mR\dot{\theta}\ddot{\theta} dt &= \int_0^t mg \dot{\theta} \sin(\theta) dt \\ \Rightarrow \left[\frac{1}{2} mR\dot{\theta}^2 \right]_0^t &= \left[-mg \cos(\theta) \right]_0^t \\ \Rightarrow \frac{1}{2} mR \left(\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 \right) &= -mg (\cos(\theta) - 1)\end{aligned}$$

Or, on a : $v_0 = R\dot{\theta}_0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} mR \left(\dot{\theta}^2 - \left(\frac{v_0}{R} \right)^2 \right) &= -mg (\cos(\theta) - 1) \\ \Rightarrow R\dot{\theta}^2 &= \frac{v_0^2}{R} + 2g(1 - \cos(\theta))\end{aligned}$$

3) On en déduit l'expression de la force de réaction de l'igloo.

$$\begin{aligned}-mR\dot{\theta}^2 &= N - mg \cos(\theta) \\ \Rightarrow N &= mg \cos(\theta) - m \left(\frac{v_0^2}{R} + 2g(1 - \cos(\theta)) \right) \\ \Rightarrow N &= m \left(-\frac{v_0^2}{R} + g(3 \cos(\theta) - 2) \right)\end{aligned}$$

4) Lorsque l'enfant quitte l'igloo, la force de réaction normale est nulle. Ainsi,

$$N = 0 = m \left(-\frac{v_0^2}{R} + g(3 \cos(\theta_c) - 2) \right) \Rightarrow \cos(\theta_c) = \frac{1}{3} \left(\frac{v_0^2}{gR} + 2 \right)$$

L'enfant décollera toujours. Si $v_0 \rightarrow 0$, il décolle en $\theta_c = \arccos(2/3) = 48,2^\circ$. Si $v_0 \geq \sqrt{gR}$ alors il décolle immédiatement, $\theta_c = 0$.

Ex. n°3 • Deux masses sur un anneau

★★★ 8929

1) La masse subie sont poids et la réaction du cerceau. On projette ces forces dans la base polaire.

Poids de la masse m :

$$\vec{P} = -mg \vec{u}_x = mg(-\cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta)$$

Réaction du cerceau :

$$\vec{N} = N \vec{u}_r$$

On rappelle l'accélération en polaire pour une trajectoire circulaire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = R \vec{u}_r \\ \vec{v} = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta \end{cases}$$

Le PFD projeté dans la base polaire donne donc :

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = N - mg \cos(\theta) \\ mR\ddot{\theta} = mg \sin(\theta) \end{cases}$$

2) On multiplie l'équation du mouvement (la dernière équation) par $\dot{\theta}$.

$$R\dot{\theta}\ddot{\theta} = g\dot{\theta} \sin(\theta) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} R\dot{\theta}^2 \right) = \frac{d}{dt} (-g \cos(\theta))$$

On intègre cette équation par rapport au temps entre l'instant initial et un instant quelconque.

$$\frac{1}{2} R(\dot{\theta}^2 - 0^2) = -g(\cos(\theta) - 1) \Rightarrow R\dot{\theta}^2 = 2g(1 - \cos(\theta))$$

On en déduit la réaction du cerceau :

$$\begin{aligned} N &= -2mg(1 - \cos(\theta)) + mg \cos(\theta) \\ &= mg(3 \cos(\theta) - 2) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\vec{N} = mg(3 \cos(\theta) - 2) \vec{u}_r = mg(3 \cos(\theta) - 2) (\cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y)}$$

3) Le cerceau subit son poids :

$$\vec{P} = -Mg \vec{u}_x$$

la réaction du support :

$$\vec{R} = R \vec{u}_x$$

et les deux réactions des masses m . D'après le principe des actions réciproques :

$$\vec{F}_{m \rightarrow M} = -\vec{F}_{M \rightarrow m} = -\vec{N}$$

Il faut prendre en compte les deux masses. L'étude précédente a été réalisée pour la masse de droite (force notée à présent $\vec{N}_1$). Par symétrie du problème, on connaît également la force $\vec{N}_2$ subie par la masse de gauche. Les composantes horizontales des deux forces se compensent, et les composantes verticales sont identiques. On en déduit :

$$\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 2mg(3 \cos(\theta) - 2) \cos(\theta) \vec{u}_x$$

4) Le PFD sur le cerceau, toujours immobile au sol, donne donc le PFD donne :

$$0 = R - Mg - 2mg(3 \cos(\theta) - 2) \cos(\theta)$$

Le cerceau décolle lorsque $R = 0$. Il faut donc :

$$0 = M + 2m(3 \cos(\theta) - 2) \cos(\theta)$$

Il s'agit d'un polynôme d'ordre 2 en $X = \cos(\theta)$. En introduisant le paramètre η , il vient :

$$6\eta X^2 - 4\eta X + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16\eta^2 - 24\eta = 8\eta(2\eta - 3)$$

Il existe donc une solution au problème (un X solution, donc un θ de décollage) si le discriminant est positif, donc si :

$$\boxed{\eta \geq \frac{3}{2}}$$

On peut même en déduire l'angle de décollage. Les solutions de l'équation sont :

$$X_{\pm} = \frac{1}{12\eta} (4\eta \pm \sqrt{8\eta(2\eta - 3)})$$

Or, le cerceau ne peut décoller que si

$$N = 2mg(3 \cos(\theta) - 2) \cos(\theta) < 0 \Rightarrow X = \cos(\theta) \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$$

Une résolution graphique montre que X_+ et X_- satisfont deux cette condition. L'angle de décollage est donc le premier angle à être atteint, donc le plus petit θ , donc le plus grand X , donc X_+ . Ainsi :

$$\theta_d = \arccos\left(\frac{1}{12\eta} (4\eta + \sqrt{8\eta(2\eta - 3)})\right)$$

1) Bilan des forces :

○ Poids :

$$\vec{P} = mg \left(-\cos(\theta) \vec{u}_z - \sin(\theta) \vec{u}_x \right)$$

○ Réaction normale du support :

$$\vec{N} = N \vec{u}_z$$

○ Force de frottement fluide :

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v} = -\alpha \dot{x} \vec{u}_x$$

On applique le PFD à la masse :

$$\begin{cases} / \vec{u}_x \rightarrow m\ddot{x} = -mg \sin(\theta) - \alpha \dot{x} \\ / \vec{u}_z \rightarrow 0 = -mg \cos(\theta) + N \end{cases}$$

On en déduit l'ED du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} = -g \sin(\theta) \Rightarrow \dot{v}_x + \frac{v_x}{\tau} = \frac{v_\infty}{\tau} \quad \text{avec : } \tau = \frac{m}{\alpha} \quad v_\infty = -g\tau \sin(\theta)$$

2) On a :

$$v_x(t) = A e^{-t/\tau} + v_\infty$$

Or, en $t = 0$:

$$v_0 = A + v_\infty \Rightarrow A = v_0 - v_\infty$$

Donc :

$$v_x(t) = (v_0 - v_\infty) e^{-t/\tau} + v_\infty$$

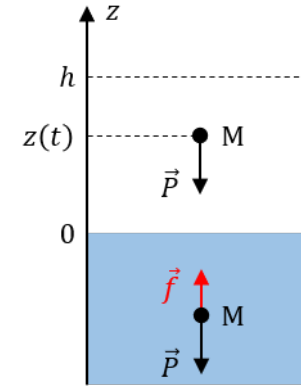
3) On cherche le temps T tel que :

$$v_x(T) = 0 \Rightarrow T = \tau \ln \left(\frac{v_0 - v_\infty}{-v_\infty} \right)$$

4) Déterminons $x(t)$ en primitivant $v_x(t)$ (on choisit la constante d'intégration tel que $x(0) = 0$) :

$$x(t) = \tau (v_0 - v_\infty) \left(1 - e^{-t/\tau} \right) + v_\infty t$$

1) Schéma :



Dans l'air, c'est une chute libre. On applique le PFD que l'on intègre 2 fois.

$$\ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z} = -gt \Rightarrow z = -\frac{gt^2}{2} + h$$

Le caillou touche l'eau lorsque $z = 0$.

$$0 = -\frac{gt_1^2}{2} + h \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{et} \quad v_1 = -gt_1 = -\sqrt{2hg}$$

2) Pour $t > t_1$, on applique le PFD projeté sur $\vec{u}_z$:

$$m\ddot{z} = -g - \alpha \dot{z} \Rightarrow \frac{d\dot{z}}{dt} + \frac{\dot{z}}{\tau} = -g \quad \text{avec : } \tau = \frac{m}{\alpha}$$

La vitesse limite correspond à la solution particulière de l'ED.

$$\frac{v_{lim}}{\tau} = -g \Rightarrow v_{lim} = -\tau g$$

3) Solution générale :

$$\dot{z}(t) = A e^{-t/\tau} + v_{lim}$$

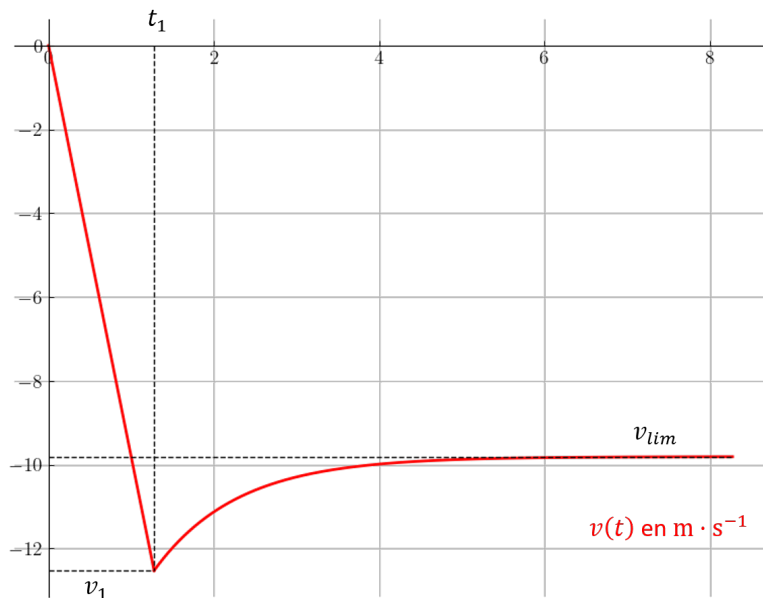
On applique la condition initiale :

$$\dot{z}(t_1) = v_1 = A e^{-t_1/\tau} + v_{lim} \Rightarrow A = (v_1 - v_{lim}) e^{t_1/\tau}$$

Ainsi,

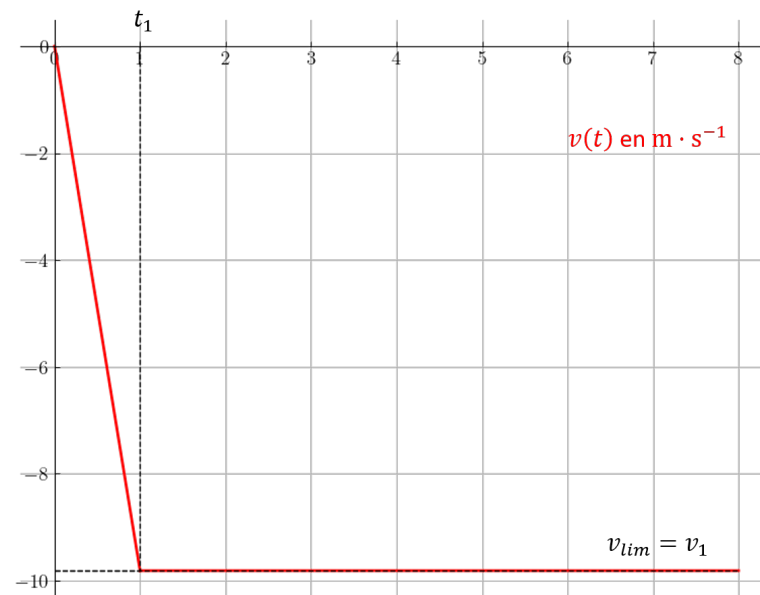
$$\dot{z}(t) = (v_1 - v_{lim}) e^{-(t-t_1)/\tau} + v_{lim}$$

Le puis étant très profond, on peut supposer que $v_1 > v_{lim}$. On obtient alors le graphe suivant.

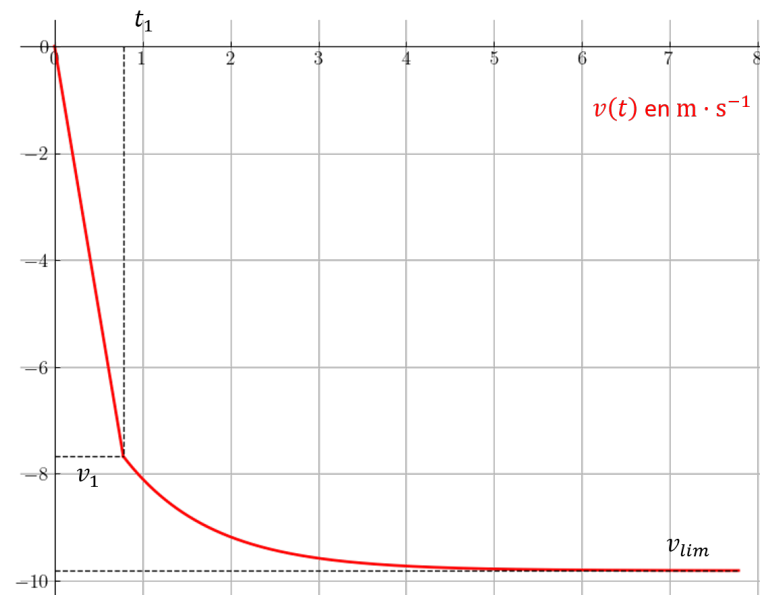


4) Un mouvement rectiligne uniforme dans l'eau correspond à un mouvement à vitesse constante. Cela signifie que le caillou doit entrer dans l'eau avec la vitesse limite. On cherche donc $h = h_c$ tel que $v_1 = v_{lim}$.

$$v_1 = v_{lim} \Rightarrow \tau g = \sqrt{2h_c g} \Rightarrow h_c = \frac{\tau^2 g}{2}$$



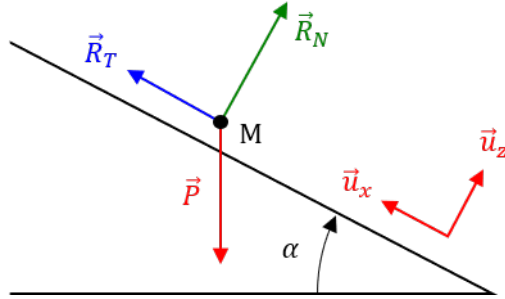
5) Graphe :



Ex. n°6 • Carton sur un plan incliné

☆☆☆ 1595

1) On suppose que le point est immobile. Schéma :



Système : masse M

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Bilan des forces :

◦ Poids

$$\vec{P} = mg \left(-\cos(\alpha) \vec{u}_z - \sin(\alpha) \vec{u}_x \right)$$

◦ Réaction du support

$$\vec{R} = R_N \vec{u}_z + R_T \vec{u}_x \quad \text{avec : } R_N, R_T > 0$$

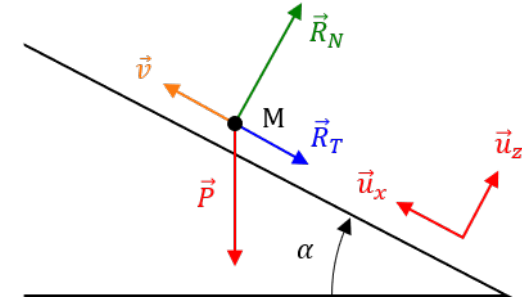
Le PFD donne :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{R} \Rightarrow \begin{cases} 0 = -mg \cos(\alpha) + R_N \\ 0 = -mg \sin(\alpha) + R_T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_N = mg \cos(\alpha) \\ R_T = mg \sin(\alpha) \end{cases}$$

L'hypothèse reste valable tant que :

$$R_T < f R_N \Rightarrow \boxed{\alpha < \alpha_m = \arctan(f)}$$

2) On suppose que le point est en mouvement. Schéma :



Système : masse M

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Bilan des forces :

◦ Poids

$$\vec{P} = mg \left(-\cos(\alpha) \vec{u}_z - \sin(\alpha) \vec{u}_x \right)$$

◦ Réaction du support

$$\vec{R} = R_N \vec{u}_z - R_T \vec{u}_x \quad \text{avec : } R_N, R_T > 0$$

Le PFD donne :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Rightarrow \begin{cases} 0 = -mg \cos(\alpha) + R_N \\ m \ddot{x} = -mg \sin(\alpha) - R_T \end{cases} \quad \text{avec : } R_T = f R_N$$

On en déduit :

$$\ddot{x} = -g \sin(\alpha) - f g \cos(\alpha) = -a_0 \quad \text{avec : } a_0 = g \sin(\alpha) + f g \cos(\alpha) > 0$$

L'accélération est uniforme : $\ddot{x} = -a_0$. On intègre deux fois pour avoir la position.

$$\ddot{x} = -a_0 \Rightarrow \dot{x} = -a_0 t + v_0 \Rightarrow \boxed{x(t) = -\frac{a_0 t^2}{2} + v_0 t}$$

On cherche le temps t_1 où la vitesse s'annule puis on détermine $d = x(t_1)$.

$$0 = -a_0 t_1 + v_0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{a_0} \Rightarrow \boxed{d = -\frac{v_0^2}{2a_0} + \frac{v_0^2}{a_0} = \frac{v_0^2}{2a_0}}$$

Ex. n°7 • Bobsleigh en virage

☆☆☆

2404

1) Il s'agit d'une trajectoire circulaire de rayon ρ constante et uniforme (v constant).

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_r \quad \text{avec :} \quad \vec{v} = \rho \omega \vec{u}_\theta \quad \text{avec :} \quad \boxed{\vec{a} = -\rho \omega^2 \vec{u}_r = -\frac{v^2}{\rho} \vec{u}_r}$$

2) L'accélération vaut :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{\rho} \left(\cos(\beta) \vec{t} + \sin(\beta) \vec{n} \right)$$

Bilan des forces :

○ Poids

$$\vec{P} = mg \left(-\cos(\beta) \vec{n} + \sin(\beta) \vec{t} \right)$$

○ Réaction du support

$$\vec{R} = R_n \vec{n} + R_t \vec{t}$$

Le PFD appliqué au bobeur dans $\mathcal{R}$ donne :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{mv^2}{\rho} \sin(\beta) = -mg \cos(\beta) + R_n \\ \frac{mv^2}{\rho} \cos(\beta) = mg \sin(\beta) + R_t \end{cases}$$

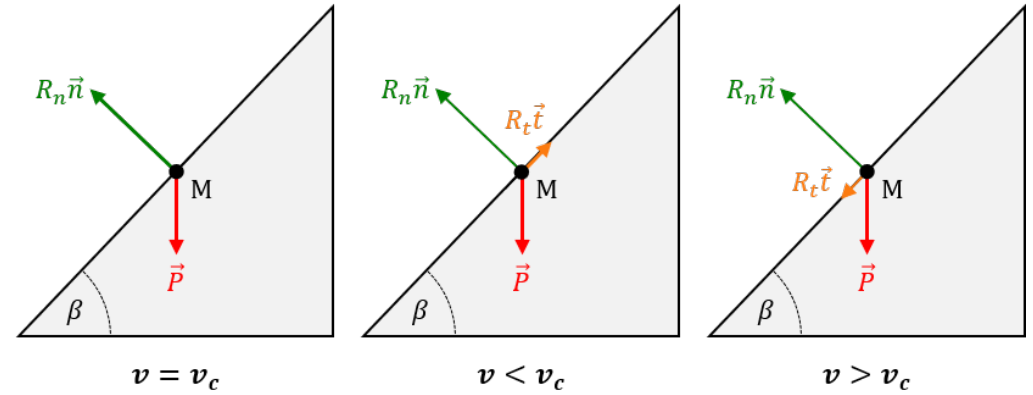
On en déduit donc :

$$\boxed{R_n = mg \cos(\beta) + \frac{mv^2}{\rho} \sin(\beta) \quad \text{et} \quad R_t = -mg \sin(\beta) + \frac{mv^2}{\rho} \cos(\beta)}$$

3) Avec ce qui précède, on a immédiatement,

$$R_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_c = \sqrt{\rho g \tan(\beta)}}$$

Pour $v > v_c$ mais toujours en condition d'adhérence, la composante tangentielle est positive, c'est à dire vers le bas de la pente. À l'inverse, si $v < v_c$, la composante tangentielle est négative, c'est à dire dirigée vers le haut de la pente.



4) Pour que le bobsleigh ne dérape jamais vers le bas quelle que soit sa vitesse, il faut en particulier qu'il ne dérape pas vers le bas à vitesse nulle ($v = 0$). Condition d'adhérence à vitesse nulle :

$$|R_t| \leq f |R_n| \quad \text{avec :} \quad v = 0 \quad \Rightarrow \quad mg \sin(\beta) \leq f mg \cos(\beta)$$

On en déduit donc :

$$\tan(\beta) \leq f \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta_1 = \arctan(f) \leq 27^\circ}$$

5) Pour que le bobsleigh ne dérape jamais vers le haut quelle que soit sa vitesse, il faut en particulier qu'il ne dérape pas vers le haut aux grandes vitesses ($v \rightarrow \infty$). Condition d'adhérence à vitesse infinie :

$$|R_t| \leq f |R_n| \quad \text{avec :} \quad v \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{\rho} \cos(\beta) \leq f \frac{mv^2}{\rho} \sin(\beta)$$

On en déduit donc :

$$\tan(\beta) \geq \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta_2 = \arctan\left(\frac{1}{f}\right) \leq 63^\circ}$$

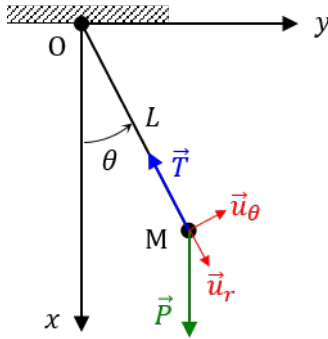
TENSION D'UN FIL

Ex. n°8 • Pendule simple

★★★ 0294

1) Système : masse M

Référentiel : terrestre supposé galiléen



On suppose que le fil est toujours tendu, le mouvement est donc circulaire de rayon R .
L'accélération vaut :

$$\overrightarrow{OM} = R \vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$$

Bilan des forces :

o Poids

$$\vec{P} = mg \vec{u}_x = mg (\cos(\theta) \vec{u}_r - \sin(\theta) \vec{u}_\theta)$$

o Tension du fil

$$\vec{T} = -T \vec{u}_r$$

On applique le PFD, que l'on projette :

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -T + mg \cos(\theta) & \leftarrow / \vec{u}_r \\ mR\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) & \leftarrow / \vec{u}_\theta \end{cases}$$

Deux équations, deux inconnues (θ et T). L'équation différentielle du mouvement est :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin(\theta) = 0$$

Avec l'approximation des petits angles :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = 0$$

2) On reprend l'ED non linéarisée et on la multiplie par $\dot{\theta}$.

$$\dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \dot{\theta} \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{R} \cos(\theta) \right) = 0$$

On intègre entre $t = 0$ et t quelconque.

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{R} \cos(\theta) = 0 - \frac{g}{R} \cos(\theta_0) \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))$$

3) On peut injecter cette relation dans le PFD.

$$T = mR\dot{\theta}^2 + mg \cos(\theta) = mg (3 \cos(\theta) - 2 \cos(\theta_0))$$

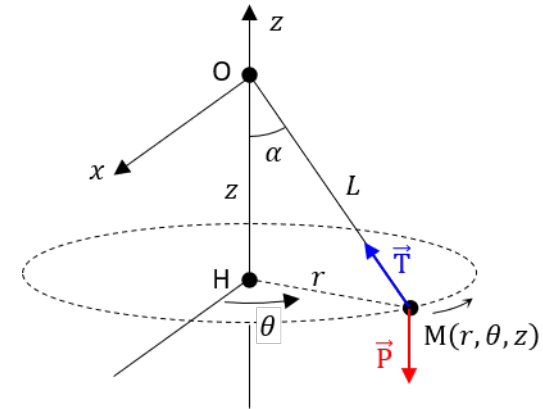
La tension est maximale lorsque $\cos(\theta)$ est maximal, donc pour $\theta = 0$.

$$T_{max} = mg (3 - 2 \cos(\theta_0)) = 1,01 \text{ N}$$

Ex. n°9 • Stabilité d'un pendule conique

★★☆ 5528

1) Schéma :



2) Bilan des forces :

o Poids : $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$

o Tension du fil : $\vec{T} = T (\cos(\alpha) \vec{u}_z - \sin(\alpha) \vec{u}_r)$

Coordonnées cylindriques :

o Position : $\overrightarrow{OM} = z \vec{u}_z + r \vec{u}_r$

o Vitesse : $\vec{v} = \dot{z} \vec{u}_z + \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$. Or, $\dot{\theta} = \omega = cte$, $z = cte$ et $r = L \sin(\alpha) = cte$.

On en déduit : $\vec{v} = r\omega \vec{u}_\theta$

◦ Accélération : $\boxed{\vec{a} = -r\omega^2 \vec{u}_r}$

On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$$\begin{cases} / \vec{u}_r \rightarrow -mL \sin(\alpha) \omega^2 = -T \sin(\alpha) \\ / \vec{u}_z \rightarrow 0 = -mg + T \cos(\alpha) \end{cases}$$

On en déduit :

$$\sin(\alpha) \left[mL\omega^2 - \frac{mg}{\cos(\alpha)} \right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin(\alpha) = 0 \\ \cos(\alpha) = \frac{g}{L\omega^2} \end{cases}$$

Les deux solutions sont possibles.

3) Cette solution est possible tant que :

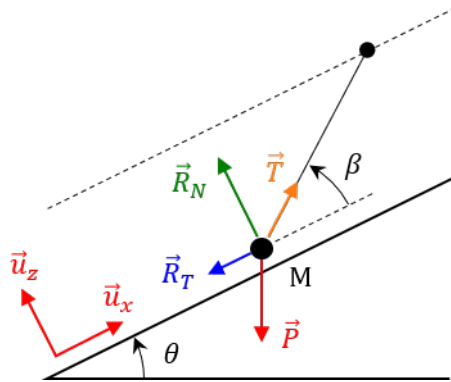
$$\frac{g}{L\omega^2} \leq 1 \Rightarrow \omega > \omega_c = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Si la condition n'est pas respectée, seule l'autre solution reste valable : $\boxed{\alpha = 0}$, le pendule reste immobile à la verticale.

Ex. n°10 • Tire-fesses

★★☆ 4731

Le skieur avance à vitesse constante v et en ligne droite, donc $\vec{a} = \vec{0}$. On est dans l'hypothèse de glissement pour les lois de Coulomb. On place une base alignée avec la pente, quelle qu'indiquer sur le schéma.



Bilan des forces :

◦ Poids

$$\vec{P} = mg \left(-\cos(\theta) \vec{u}_z - \sin(\theta) \vec{u}_x \right)$$

◦ Tension du câble

$$\vec{T} = T \left(\cos(\beta) \vec{u}_x + \sin(\beta) \vec{u}_z \right)$$

◦ Réaction du sol

$$\vec{R} = R \left(\vec{u}_z - f \vec{u}_x \right)$$

On applique le PFD sur le skieur.

$$\begin{cases} 0 = -mg \sin(\theta) + T \cos(\beta) - fR & \leftarrow / \vec{u}_x \\ 0 = -mg \cos(\theta) + T \sin(\beta) + R & \leftarrow / \vec{u}_z \end{cases}$$

On isole R dans chaque équation.

$$R = \frac{-mg \sin(\theta) + T \cos(\beta)}{f} = mg \cos(\theta) - T \sin(\beta)$$

On isole alors T :

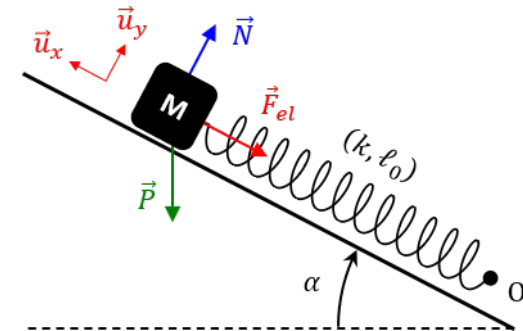
$$\boxed{T = mg \frac{f \cos(\theta) + \sin(\theta)}{\cos(\beta) + f \sin(\beta)}}$$

FORCE DE RAPPEL ÉLASTIQUE

Ex. n°11 • Masse ressort sur un plan incliné

★★☆ 4501

1) On prend l'origine du repère en O. Ainsi, $\ell(t) = x(t)$.



Bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} = mg \left[-\cos(\alpha) \vec{u}_y - \sin(\alpha) \vec{u}_x \right] \\ \vec{N} = N \vec{u}_y \\ \vec{F}_{el} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_x = -k(x - \ell_0) \vec{u}_x \end{cases}$$

On applique le PFD sur la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen, que l'on projette selon $\vec{u}_x$.

$$m\ddot{x} = -mg \sin(\alpha) - k(x - \ell_0) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x(t) = \frac{k\ell_0}{m} - g \sin(\alpha)$$

2) Lorsque la masse est à l'équilibre, $x = x_{eq}$ est constant donc $\ddot{x}$. L'ED devient :

$$\frac{k}{m} x_{eq} = \frac{k\ell_0}{m} - g \sin(\alpha) \Rightarrow x_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k} \sin(\alpha)$$

On a ainsi,

$$\begin{aligned} x_{eq}(\alpha = 0) &= \ell_0 & x_{eq}\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right) &= \ell_0 - \frac{mg}{k} < \ell_0 \\ x_{eq}\left(\alpha = -\frac{\pi}{2}\right) &= \ell_0 + \frac{mg}{k} > \ell_0 \end{aligned}$$

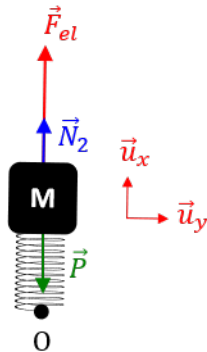
3) On remarque que :

$$x_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k} \Rightarrow m = (\ell_0 - x_{eq}) \frac{k}{g} > \frac{k\ell_0}{2g} \Rightarrow \ell_0 - x_{eq} > \frac{\ell_0}{2}$$

On en déduit donc que :

$$x_{eq} < \frac{\ell_0}{2}$$

Ce qui est impossible. Les spires sont en contact, il y a donc une force de réaction normale N_2 supplémentaire afin de respecter la condition $x_{eq} = \ell_{min}$.



Un PFD à l'équilibre projeté sur $\vec{u}_x$ donne :

$$0 = -mg - k(x_{eq} - \ell_0) + N_2 \quad \text{avec : } x_{eq} = \frac{\ell_0}{2}$$

On en déduit l'expression de N_2 :

$$N_2 = mg - \frac{k\ell_0}{2} > 0 \quad \text{car : } m > \frac{k\ell_0}{2g}$$

Ex. n°12 • Bille sur un rail en rotation

★★★ 7158

1) En coordonnées polaires, avec $\dot{\theta} = \omega_0 = cte$, on a :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\omega_0 \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r\omega_0^2) \vec{u}_r + 2\dot{r}\omega_0 \vec{u}_\theta$$

Bilan des forces :

○ Poids : $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$

○ Réaction normale du support : $\vec{N} = N_z \vec{u}_z + N_\theta \vec{u}_\theta$

On applique donc le PFD :

$$\begin{cases} / \vec{u}_r \rightarrow m(\ddot{r} - r\omega_0^2) = 0 \\ / \vec{u}_\theta \rightarrow 2m\dot{r}\omega_0 = N_\theta \\ / \vec{u}_z \rightarrow 0 = -mg + N_z \end{cases}$$

L'équation différentielle du mouvement est donc : $\ddot{r} - r\omega_0^2 = 0$

2) On a :

$$\ddot{r} = r\omega_0^2 > 0$$

La bille accélère continuellement vers l'extérieure (et plus il est loin du centre, plus il sera accéléré vers l'extérieure). Elle va donc finir par être éjectée du rail.

3) On rappelle que le ressort exerce une force :

$$\vec{F} = -k(r - \ell_0) \vec{u}_r$$

Le nouveau PFD projeté sur $\vec{u}_r$ donne :

$$m(\ddot{r} - r\omega_0^2) = -k(r - \ell_0) \Rightarrow \ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)r = \frac{k}{m}\ell_0$$

On cherche une position d'équilibre, ie. $\ddot{r} = 0$. Ainsi,

$$\left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) r_{eq} = \frac{k}{m} \ell_0 \quad \Rightarrow \quad r_{eq} = \frac{\frac{k}{m} \ell_0}{\frac{k}{m} - \omega_0^2}$$

Mais puisque $r > 0$ (c'est une distance à l'origine), il faut nécessairement que $\frac{k}{m} > \omega_0^2$